Les Transformations du plan

Leçon : Transformations du plan
Présentation globale
I) symétrie axiale et symétrie centrale et translation et l'homothétie

II. Propriété caractéristique de la symétrie centrale et la translation et l'homothétie
III. Propriété des transformations
IV) images des figures par les transformations

I) symétrie axiale et symétrie centrale et translation et l'homothétie

1° symétrie axiale

Définition : (Δ) est une droite du plan.

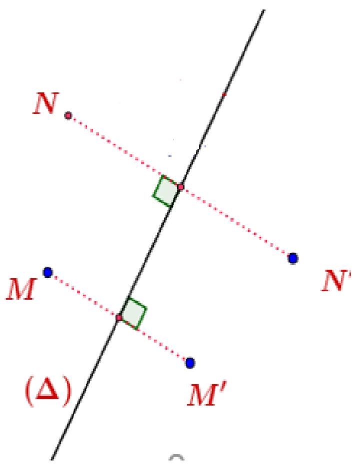
La symétrie axiale d'axe (Δ) est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : (Δ) est la médiatrice du segment [MM']

La symétrie axiale d'axe (Δ) est notée : $S_{(\Delta)}$

D'où : $S_{(\Delta)}(M)=M'$ ssi (Δ) est la médiatrice du segment [MM']

$S_{(\Delta)}(N)=N'$

$S_{(\Delta)}(M)=M'$



2° Symétrie centrale

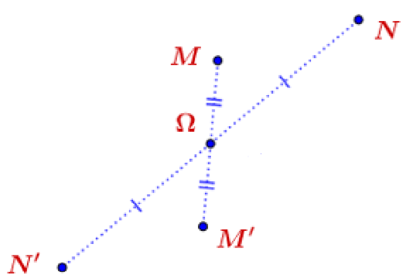
Définition :

Ω est un point du plan

La symétrie centrale de centre Ω est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$

La symétrie centrale de centre Ω est notée : S_{Ω}

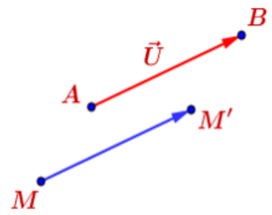
D'où : $S_{\Omega}(M)=M'$ ssi $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$



3° Translation

Définition : $\vec{u}$ est un vecteur du plan . La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$ La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée : $t_{\vec{u}}$

D'où : $t_{\vec{u}}(M)=M'$ ssi $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$



4° Homothétie

Définition1: Ω est un point du plan et k un nombre réel .
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$

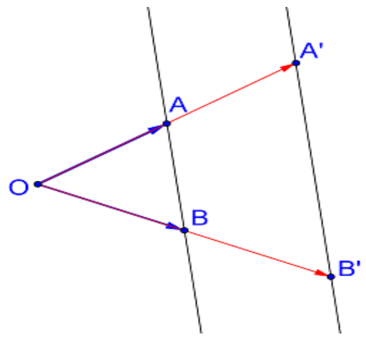
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est notée : $h_{(\Omega,k)}$

D'où : $h(M)=M'$ ssi $\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$

Exemple : soit L'homothétie de centre O et de rapport $k=2$ donc $h_{(O,2)}$

$h(A)=A'$ ssi $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$

$h(B)=B'$ ssi $\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$



II. Propriété caractéristique de la symétrie centrale et la translation et l'homothétie

1° Propriété caractéristique de l'homothétie

Soit $k\in\mathbb{R}^*$

- Soit l'homothétie $h_{(\Omega,k)}$ et M et N deux points tq

$h(M)=M'$ et $h(N)=N'$ alors $\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega N'}=k\,\overrightarrow{\Omega N}$

D'où:

$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{M'\Omega}+\overrightarrow{\Omega N'}=-\overrightarrow{\Omega M'}+\overrightarrow{\Omega N'}=-k\,\overrightarrow{\Omega M}+k\,\overrightarrow{\Omega N}=k\left(-\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{\Omega N}\right)$

$\overrightarrow{M'N'} = k\left(\overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'}\right) = k\,\overrightarrow{MN}$

- la réciproque est vraie c a d si T une transformation du plan P tq si T(M)=M' et T(N)=N' on a $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

on en déduit T est une homothétie

Propriété : Soit T une transformation du plan P et $k \in \mathbb{R}^*$

T est une homothétie ssi T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tq $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$

2° Propriété caractéristique de la symétrie centrale

Si on prend $k = -1$ on trouve la propriété caractéristique de la symétrie centrale

Propriété : Soit T une transformation du plan P

T est une symétrie centrale ssi T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tq $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$

3° Propriété caractéristique de la translation

Soit la translation $t_{\vec{u}}$

- Si on a $t_{\vec{u}}(M) = M'$ et $t_{\vec{u}}(N) = N'$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

et $\vec{u} = \overrightarrow{NN'}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$

Donc $MM'N'N$ est un parallélogramme donc

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Si T une transformation du plan P tq a $T(M) = M'$

et $T(A) = A'$ tq $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$

Alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ en déduit que T une translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$

Propriété : Soit T une transformation du plan P

T est une translation ssi T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tq $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

III. Propriété des transformations

Définition

Un point A est invariant si son image A' est lui-même ; c'est-à-dire A' = A.

Propriété1 :

Dans une symétrie de centre I, seul le centre de symétrie, I est un point invariant

Dans une symétrie axial d'axe Δ , les points invariants sont les points de la droite Δ .

Dans une translation de vecteur $\vec{u} \neq 0$, il n'y a aucun point invariant.

Propriétés de la translation :

Propriétés de conservation

La Translation conserve l'alignement des Points et le coefficient d'alignement.

La Translation conserve le Milieu.

La Translation conserve la distance.

La Translation conserve la mesure des angles.

La Translation conserve le Parallélismes et l'orthogonalité.

Propriéts de La symétrie centrale :

Propriétés de conservation

La symétrie centrale conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.

La symétrie centrale conserve le milieu.

La symétrie centrale conserve la distance.

La symétrie centrale conserve la mesure des angles.

La symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Propriéts de La symétrie axiale :

Propriétés de conservation

La symétrie axiale conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.

La symétrie axiale conserve le milieu.

La symétrie axiale conserve la distance.

La symétrie axiale conserve la mesure des angles.

La symétrie axiale conserve le parallélisme et l'orthogonalité

Propriéts de L'homothétie

Propriétés de conservation

L'homothétie conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.

L'homothétie conserve le milieu.

L'homothétie ne conserve pas les distance.

L'homothétie conserve la mesure des angles.

L'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

IV) images des figures par les transformations

1)Image d'une figure par une Translation:

L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

L'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite qui lui est parallèle.

L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur.

L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon.

2)Image d'une figure par une symétrie centrale:

L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle. L'image d'une demi-droite par une symétrie centrale est une demi-droite qui lui est parallèle.

L'image d'un segment par une symétrie centrale est un segment de même longueur.

L'image d'un cercle par une symétrie centrale est un cercle de même rayon.

3)Image d'une figure par une symétrie axiale:

L'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite q homothétie qui ne lui est parallèle. Que si la droite est parallèle à l'axe de la symétrie.

L'image d'une demi-droite par une symétrie axiale est une demi-droite.

L'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur. L'image d'un cercle par une symétrie axiale est un cercle de même rayon**.**

4)Image d'une figure par une symétrie homothétie:

L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

L'image d'une demi-droite par homothétie est une demi-droite qui lui est parallèle. L'image d'un segment par homothétie est un segment.

L'image d'un cercle par homothétie est un cercle.

Exercice 1 :

$ABCD$ un losange de centre O et I le milieu du segment $[AB]$

et J le milieu du segment $[AD]$

1)faite une figure

2)Déterminer $S_O(A)$ et $S_O(B)$ et $S_O(O)$ et $S_O((AB))$

3)Déterminer $S_{(AC)}(B)$ et $S_{(AC)}(A)$ et $S_{(AC)}(O)$ et $S_{(AC)}([AB])$ et $S_{(AC)}(I)$ et $S_{(AC)}((OI))$

4)Déterminer $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

Solution :

2) $S_O(A)=C$ Car $OA=OC$

$S_O(B)=D$ Car $OB=OD$

$S_O(O)=O$ Car O est invariant

On a $\begin{cases} S_O(A)=C \\ S_O(B)=D \end{cases}$ donc $S_O((AB))=(CD)$

Et on a $(AB)\,||\,(CD)$ car L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.

3)

• $S_{(AC)}(B)=D$ car (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

• $S_{(AC)}(A)=A$ car tous les points de la droite (AC) sont invariants

• $S_{(AC)}(O)=O$ car $O\in(AC)$ et tous les points de la droite (AC) sont invariants

• On a $\begin{cases} S_{(AC)}(A)=A \\ S_{(AC)}(B)=D \end{cases}$ donc $S_{(AC)}([AB])=[AD]$

• On a I le milieu du segment $[AB]$ et $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ donc $S_{(AC)}(I)$ est le milieu du segment $[AD]$ donc c'est J donc $S_{(AC)}(I)=J$

• On a $\begin{cases} S_{(AC)}(O)=O \\ S_{(AC)}(I)=J \end{cases}$ donc $S_{(AC)}((OI))=(OJ)$

4)

• On a $ABCD$ un losange donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ donc $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$

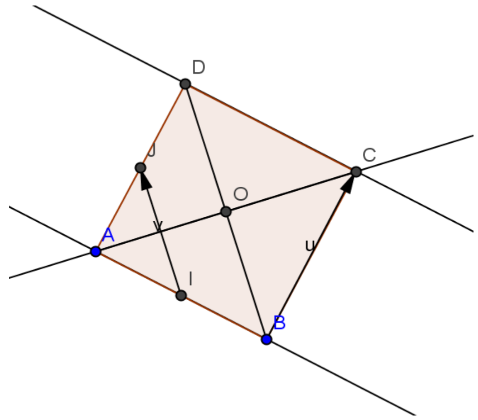
• On a ABD un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$

Donc $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ et on a O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$

Alors $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ donc $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

• On a $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ et O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

Donc $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ c a d $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$ et on a $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$ donc



$t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

Exercice 2:

Écrire l'expression vectorielle suivante $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ en utilisant une homothétie

Solution :

Soit l'homothétie $h_{\left(I,-\frac{2}{3}\right)}$

$\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ ssi $h(B)=C$

Exercice 3 :

Écrire les expressions vectorielles suivantes en utilisant une homothétie

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

$2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ Avec Ω un point donné

$3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

Solution : $h(I,k)$:

1) $h(A)=B$ ssi $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ssi $2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ ssi

$2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ssi $-\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I,\frac{1}{3}\right)$

2) $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ ssi $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}$ ssi

$2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$ ssi $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{AB}$ ssi $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$

donc $h(\Omega,-1)$

3) $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ssi $3\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ ssi

$3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ssi $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Ssi $8\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$ ssi $\overrightarrow{IB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I,\frac{8}{5}\right)$

Exercice 4 :

$ABCD$ un parallélogramme et I et J deux points tq $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

1)faite une figure

2)Monter que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3)Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C

a) Montrer que $h((AB))=(CD)$

b) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-2$

4)Soit le point K tq $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J)=K$

b) Montrer que $AI=\frac{1}{2}CK$

Solution :

1)La figure

2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$ ؟؟؟؟؟

On a $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

On donc $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

Déduction : on sait que L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc $(AI)\parallel(BJ)$

3)a) on a $h(B)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B c a d C donc $h((AB))=(CD)$

3)b) on a $h(B)=C$ donc $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$ donc

$3\overrightarrow{CI}=2(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB})$ donc $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

Donc $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$

Donc $k=-2$

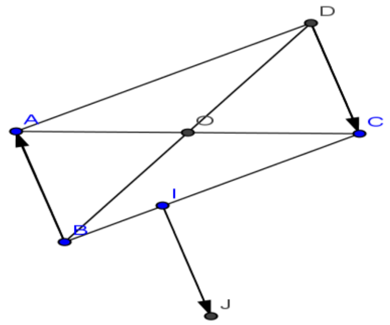
4)a) $h(J)=K$ ؟؟؟؟؟

On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$ donc $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$ donc $h(J)=K$

4)b) on a $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc $\|\overrightarrow{CK}\|=\|-2\overrightarrow{BJ}\|$ donc $\|\overrightarrow{CK}\|=|-2|\|\overrightarrow{BJ}\|$ donc $CK=2BJ$

Et on a



$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABJI$ parallélogramme donc $BJ=AI$

Donc $CK=2AI$ donc $AI=\frac{1}{2}CK$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien